EQUATIONS D'EVOLUTION DU SECOND ORDRE ASSOCIEES A DES OPERATEURS MONOTONES

PAR

H. BREZIS

ABSTRACT

This paper extends some recent results of V. Barbu. It is concerned with bounded solutions of the problem: $u'' \in Au$, $u'(0) \in \partial j(u(0) - a)$ where A is a maximal monotone operator in a Hilbert space H, $a \in D(A)$ and j is a strictly convex l.s.c. function from H to $[0, +\infty]$. An existence and uniqueness theorem for this problem is proved. Taking j to be the indicator function of a point $u_0 \in D(A)$, one obtains a bounded solution $u(t)$ of the initial value problem: $u'' \in Au$, $u(0) = u_0$. Denoting $u(t) = S_{\frac{1}{2}}(t)u_0$ one obtains a semigroup of contractions on $\overline{D(A)}$. The generator of this semigroup is denoted by $A_{\frac{1}{2}}$. Further properties of $S_{\frac{1}{2}}(t)$ and $A_{\frac{1}{2}}$ are studied.

Introduction

L'objet de ce travail est d'étendre et de préciser certains résultats de Barbu [1]; nous remercions V. Barbu d'avoir bien voulu nous communiquer un preprint de [1].

Soit H un espace de Hilbert et soit A un opérateur maximal monotone dans H tel que $0 \in R(A)$. Soit j une fonction convexe s.c.i. de H dans $[0, +\infty]$ telle que $j(0) = 0$ et

$$\lim_{|v| \to +\infty} \frac{j(v)}{|v|} = +\infty.$$

On suppose que A est ∂j-monotone, i.e.,

$$j((I + \lambda A)^{-1}x - (I + \lambda A)^{-1}y) \leqq j(x-y) \text{ pour tout } x, y \in H,\ \lambda > 0.$$

On pose $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

1. Un premier résultat d'existence

THEOREM 1. *Pour tout $a \in D(A)$, il existe une fonction $u \in C^1(\mathbb{R}_+; H) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ telle que $u' \in L^2(\mathbb{R}_+; H)$, $u'' \in L^2(\mathbb{R}_+; H)$, $u(t) \in D(A)$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant*

Received February 21, 1972

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} u'' \in Au \quad p.p. \ sur \ \mathbb{R}_+ \\ u'(0) \in \partial j(u(0) - a) \end{cases}$$

Si de plus j est strictement convexe, alors u est unique.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

Unicité. Soient u et $\hat{u}$ deux solution et posons $v = u - \hat{u}$; grâce à la monotonie de A, on a $(v'',v) \geqq 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$. Donc $\frac{1}{2}(d^2/dt^2)|v|^2 \geqq |dv/dt|^2 \geqq 0$, et par suite la fonction $t \to |v(t)|^2$ est convexe (et bornée sur $\mathbb{R}_+$); il en résulte qu'elle est décroissante. Or on a

$$(v'(t),(v(t)) - (v'(0),v(0)) - \int_0^t |v'(s)|^2 ds \geqq 0;$$

comme $(v'(t),v(t)) = \frac{1}{2}(d/dt)|v(t)|^2 \leqq 0$ et $(v'(0),v(0)) \geqq 0$ grâce *à* la monotonie de ∂j, il vient $v' = 0$.

Enfin, on a

$$j(u(0) - a) - j(\hat{u}(0) - a) \geqq (\hat{u}'(0), u(0) - \hat{u}(0)) \quad \text{et}$$
$$j(\hat{u}(0) - a) - j(u(0) - a) \geqq (u'(0), \hat{u}(0) - u(0));$$

par suite

$$j(\hat{u}(0) - a) - j(u(0) - a) = (u'(0), \hat{u}(0) - u(0)).$$

Or, si $u(0) \neq \hat{u}(0)$ on obtient

$$\tfrac{1}{2}\, j(u(0) - a) + \tfrac{1}{2}\, j(\hat{u}(0) - a) > j\left(\frac{u(0) + \hat{u}(0)}{2} - a\right)$$

$$\geqq j(u(0) - a) + (u'(0), \left(u'(0), \frac{\hat{u}(0) - u(0)}{2}\right) = \tfrac{1}{2} j(u(0) - a) + \tfrac{1}{2} j(\hat{u}(0) - a)\,,$$

ce qui est absurde.

Existence. Par translation on peut se ramener au cas où $0 \in A0$. Dans l'espace de Hilbert $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}_+; H)$ on considère les opérateurs

$$\mathscr{A} = \{[u,f] \in \mathscr{H} \times \mathscr{H};\ f(t) \in Au(t) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}_+\}$$
$$\mathscr{B}u = -u'' \text{ avec}$$
$$D(\mathscr{B}) = \{u \in \mathscr{H};\ u' \in \mathscr{H};\ u'' \in \mathscr{H} \text{ et } u'(0) \in \partial j(u(0) - a)\}$$

Il est clair que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont maximaux monotones ($\mathscr{B}$ est le sous différentiel dans $\mathscr{H}$ de la fonction convexe s.c.i. $\frac{1}{2} \int_0^\infty |u'|^2 dt + j(u(0) - a))$.

Nous montrons d'abord que pour tout $\delta > 0$ le problème

$$\begin{cases} u'' \in Au + \delta u & \text{p. p. sur } \mathbb{R}_+ \\ u'(0) \in \partial j(u(0) - a) \end{cases}$$

admet une solution $u \in D(\mathscr{A}) \cap D(\mathscr{B})$. Pour cela il suffit de prouver (cf. Brezis et al. [4]; Brezis [3], théorème 2.4) que si l'on désigne par u_λ la solution de l'équation $\mathscr{A}_\lambda u_\lambda + \delta u_\lambda + \mathscr{B} u_\lambda \ni 0$, alors $\mathscr{A}_\lambda u_\lambda$ demeure borné dans $\mathscr{H}$ quand $\lambda \to 0$.

Estimations. Comme $(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) \geqq 0$, on a $(u_\lambda'', u_\lambda) \geqq 0$ sur $\mathbb{R}_+$; d'où il vient après intégration sur $]t, +\infty[$

$$(u_\lambda'(t), u_\lambda(t)) + \int_t^{+\infty} |u_\lambda'|^2 \, ds \leqq 0 .$$

On en déduit que la fonction $t \to |u_\lambda(t)|^2$ est convexe décroissante et que

$$\int_0^{+\infty} |u_\lambda'|^2 \, dt \leqq -(u_\lambda'(0), u_\lambda(0)) \leqq -(u_\lambda'(0), a) \leqq |u_\lambda'(0)| \, |a|$$

(car $u_\lambda'(0) \in \partial j(u_\lambda(0) - a)$). On a aussi

$$\int_0^T t(u_\lambda'', u_\lambda) dt \geqq 0 \text{ et donc } T(u_\lambda'(T), u_\lambda(T)) \geqq \int_0^T (u_\lambda', t u_\lambda' + u_\lambda) \, dt.$$

Par conséquent

$$\int_0^T t |u_\lambda'|^2 \, dt \leqq \tfrac{1}{2} |u_\lambda(0)|^2$$

D'autre part, on a grâce à la monotonie de A_λ, $(u_\lambda''', u_\lambda') \geqq 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$ (noter que $u_\lambda''' \in \mathscr{H}$ puisque A_λ est lipschitzien). On en déduit que la fonction $t \to |u_\lambda'(t)|^2$ est convexe décroissante et que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |u_\lambda''|^2 \, dt &\leqq -(u_\lambda''(0), u_\lambda'(0)) = -(A_\lambda u_\lambda(0) + \delta u_\lambda(0), u_\lambda'(0)) \\ &\leqq -(A_\lambda a + \delta a, u_\lambda'(0)) \leqq |u_\lambda'(0)| \ (|A^0 a| + \delta |a|) \end{aligned}$$

car A_λ est ∂j-monotone (cf. [3], proposition 4.7). Par ailleurs

$$\tfrac{1}{2} |u_\lambda'(0)|^2 = -\int_0^\infty (u_\lambda'', u_\lambda') dt \leqq |u_\lambda''|_{\mathscr{H}} |u_\lambda'|_{\mathscr{H}} \leqq |u_\lambda'(0)| \, |a|^{\frac{1}{2}} (|A^0 a| + \delta |a|)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$|u_\lambda'(0)| \leqq 2 |a|^{\frac{1}{2}} (|A^0 a| + \delta |a|)^{\frac{1}{2}} . \tag{2}$$

Il en résulte que u_λ'' demeure borné dans $\mathscr{H}$ quand $\lambda \to 0$. Enfin, on a

$$\delta(u_\lambda, A_\lambda u_\lambda) + |A_\lambda u_\lambda|^2 \leqq |u_\lambda''|\,|A_\lambda u_\lambda| \text{ p.p. sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } |A_\lambda u_\lambda|_{\mathscr{H}} \leqq |u_\lambda''|_{\mathscr{H}}.$$

On a ainsi prouvé qu'il existe $u_\delta \in D(\mathscr{A}) \cap D(\mathscr{B})$ solution du problème:

$$\begin{cases} u_\delta'' \in Au_\delta + \delta u_\delta & \text{p.p. sur } \mathbb{R}_+ \\ u_\delta'(0) \in \partial j(u_\delta(0) - a) & \end{cases}$$

(de plus $u_\lambda \to u_\delta$ dans $\mathscr{H}$ quand $\lambda \to 0$).*

Passage a la limite quand $\delta \to 0$. On a les estimations

$$\int_0^{+\infty} |u_\delta'|^2 dt \leqq 2|a|^{\frac{3}{2}}(|A^0 a| + \delta|a|)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

$$\int_0^{+\infty} t|u_\delta'|^2 dt \leqq \tfrac{1}{2}|u_\delta(0)|^2 \tag{4}$$

$$\int_0^{+\infty} |u_\delta''|^2 dt \leqq 2|a|^{\frac{1}{2}}(|A_0 a| + \delta|a|)^{\frac{3}{2}} \tag{5}$$

$$|u_\delta'|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H)} \leqq 2|a|^{\frac{1}{2}}(|A_0 a| + \delta|a|)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

De plus $u_\delta(0) \in (\partial j)^{-1}(u_\delta'(0)) + a$, et donc $u_\delta(0)$ demeure borné dans H (cf. [3], proposition 2.14). Il en résulte que

$$\|u_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H)} \leqq C.$$

On a $(\gamma u_\gamma - \delta u_\delta,\ u_\gamma - u_\delta) - (u_\gamma'' - u_\delta'', u_\gamma - u_\delta) \leqq 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$ et donc, en posant $v = u_\gamma - u_\delta$, on obtient $(v'', v) \geqq -2(\gamma + \delta)C^2$. Intégrant cette inégalité sur $]0, T[$ il vient

$$(v'(T), v(T)) - (v'(0), v(0)) - \int_0^T |v'|^2 dt \geqq -2(\gamma + \delta)TC^2.$$

Or $(v'(0), v(0)) \geqq 0$ puisque ∂j est monotone; donc

$$\int_0^T |v'(t)|^2 dt \leqq 2C|v'(T)| + 2(\gamma + \delta)TC^2.$$

D'autre part, on a, d'après (4)

$$\tfrac{1}{2}T^2|u_\delta'(T)|^2 + T\int_T^{+\infty} |u_\delta'|^2 dt \leqq \tfrac{1}{2}C^2$$

(puisque $|u_\delta'|$ est décroissant).

Par suite

---

* En modifiant sensiblement la démonstration, on peut montrer que $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ est maximal monotone (remarque de M. Crandall).

$$\int_0^{+\infty} |v'(t)|^2 dt \leqq \int_0^T |v'(t)|^2 dt + \int_T^{+\infty} |v'(t)|^2 dt \leqq \frac{6C^2}{T} + 2(\gamma + \delta)TC^2.$$

Choisissant $T = 1/\sqrt{\gamma + \delta}$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} |v'(t)|^2 dt \leqq 8C^2\sqrt{\gamma + \delta}$$

On en déduit que $u'_\delta \to w$ dans $\mathscr{H}$ et que $u''_\delta \to w'$ dans $\mathscr{H}$ faible quand $\delta \to 0$ (w continu de $\mathbb{R}_+$ dans H). Il en résulte que $u'_\delta \to w$ uniformément sur $\mathbb{R}_+$ (car $\frac{1}{2}|u'_\delta(t) - w(t)|^2 \leqq |u'_\delta - w|_{\mathscr{H}} |u''_\delta - w'|_{\mathscr{H}}$).

D'autre part, il existe une suite $\delta_n \to 0$ telle que $u_{\delta_n}(0) \to l$ dans H faible. On a

$$u_{\delta_n}(t) = u_{\delta_n}(0) + \int_0^t u'_{\delta_n}(s)ds$$

et par consequent

$$u_{\delta_n}(t) \to u(t) = l + \int_0^t w(s)ds \quad \text{dans } H \text{ faible, pour tout } t \in \mathbb{R}_+$$

$$u_{\delta_n} \to u \qquad \text{dans } L^2(0, T; H) \text{ faible, pour tout } T < +\infty.$$

Enfin, il résulte de la relation $u'_{\delta_n}(0) \in \partial j(u_{\delta_n}(0) - a)$ que $w(0) \in \partial j(l - a)$ i.e. $u'(0) \in \partial j(u(0) - a)$.

Par ailleurs $f_\delta = u''_\delta - \delta u_\delta \in Au_\delta$ et f_δ est borné dans $L^2(0, T; H)$. De plus

$$\int_0^T (f_\delta, u_\delta - u)dt = \int_0^T (u''_\delta - \delta u_\delta, u_\delta - u)dt =$$

$$\int_0^T (u'', u_\delta - u)dt + (u'_\delta(T) - u'(T), u_\delta(T) - u(T)) - (u'_\delta(0) - u'(0), u_\delta(0) - u(0)) -$$

$$- \int_0^T |u'_\delta - u'|^2 dt - \delta \int_0^T (u_\delta, u_\delta - u)dt.$$

Donc $\int_0^T (f_\delta, u_\delta - u)dt \to 0$; on conclut à l'aide de la proposition 2.5 de [3] que $u'' \in Au$ p.p. sur $]0, T[$.

Exemple 1. Soit A un opérateur maximal monotone tel que $0 \in R(A)$. Pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction unique $u \in C^1(\mathbb{R}_+; H) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ telle que $u' \in L^2(\mathbb{R}_+, H)$, $u'' \in L^2(\mathbb{R}_+; H)$, $u(t) \in D(A)$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\begin{cases} u'' \in Au \text{ p.p. sur } \mathbb{R}_+ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer le Théorème 1 avec

$$j(v) = \begin{cases} 0 & v = 0 \\ +\infty & v \neq 0 \end{cases}$$

Il est clair que tout A est ∂j-monotone et que j est strictement convexe. Pour chaque $t \geqq 0$, l'application $u_0 \to u(t)$ définit une contraction de $D(A)$ dans $\overline{D(A)}$ que l'on prolonge par continuité à $\overline{D(A)}$. On obtien ainsi un semi-groupe de contractions sur $\overline{D(A)}$ que l'on désigne par $S_{\frac{1}{2}}(t)$; soit $-A_{\frac{1}{2}}$ son générateur. Notons que si $0 \in A0$, on a grâce à (2), pour tout $u_0 \in D(A) \, |A^0_{\frac{1}{2}} u_0| \leqq 2 |A_0 u_0|^{\frac{1}{2}} |u_0|^{\frac{1}{2}}$ (en particulier $A_{\frac{1}{2}}$ est dominé par A); peut-on remplacer 2 par $\sqrt{2}$?*

EXEMPLE 2. Soit A un opérateur maximal monotone tel que $0 \in R(A)$. Pour tout $a \in D(A)$ et tout $\lambda > 0$, il existe une fonction unique $u \in C^1(\mathbb{R}_+; H) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+ H)$ telle que $u' \in L^2(\mathbb{R}_+; H), u'' \in L^2(\mathbb{R}_+; H)$, $u(t) \in D(A)$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant

$$\begin{cases} u'' \in Au & \text{p.p. sur } \mathbb{R}_+ \\ \lambda u'(0) = u(0) - a \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer le Théorème 1 avec $j(v) = (1/2\lambda)|v|^2$.

COROLLAIRE 2. *On a* $R(I + \lambda A^0{}_{\frac{1}{2}}) \supset D(A)$ *pour tout* $\lambda > 0$ *et en particulier* $A_{\frac{1}{2}} = \overline{A^0{}_{\frac{1}{2}}} + \partial I_{\overline{D(A)}}$. *De plus* $A_{\frac{1}{2}}$ *est univoque lorsque* $D(A) = H$.

En effet, soient $a \in D(A)$, $\lambda > 0$ et soit $u(t)$ la fonction considérée à l'exemple 2; on a

$$\frac{S_{\frac{1}{2}}(t)\,u(0) - u(0)}{t} = \frac{u(t) - u(0)}{t} \to u'(0) \text{ quand } t \to 0.$$

Donc $u(0) \in D(A_{\frac{1}{2}})$ et $-A^0_{\frac{1}{2}} u(0) = u'(0) = 1/\lambda(u(0) - a)$; par conséquent $a \in R(I + \lambda A^0_{\frac{1}{2}})$.

Il en résulte que $R(I + \lambda A^0_{\frac{1}{2}}) \supset D(A)$, et d'après la proposition 2.19 de [3], $A_{\frac{1}{2}} = \overline{A^0_{\frac{1}{2}}} + \partial I_{\overline{D(A)}}$. Enfin, il est clair que si $D(A) = H$, alors $A^0_{\frac{1}{2}}$ est maximal monotone, et par suite $A_{\frac{1}{2}} = A^0_{\frac{1}{2}}$ est univoque.

REMARQUE 1. Il serait intéressant de déterminer si $D(A_{\frac{1}{2}})$ est convexe et si $A^0_{\frac{1}{2}}$ est hémicontinu sur $D(A_{\frac{1}{2}})$.

2. Comportment de $S_{\frac{1}{2}}(t)$ quand $t \to 0$ et $t \to +\infty$.

---

* Il semble que $\sqrt{2}$ soit la meilleure constant possible. Il en est ainsi lorsque $A = \partial\phi$ (cf. théorème 4) et dans le cas linéaire (cf. [5].

THÉORÈME 3. *Pour tout* $u_0 \in \overline{D(A)}$, *la fonction* $u(t) = S_{\frac{1}{2}}(t)u_0$ *vérifie* $u \in C(\mathbb{R}_+; H) \cap C^1(]0, +\infty[; H) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+; H), u' \in L^2(\delta, +\infty; H), u'' \in L^2(\delta, +\infty; H)$ *pour tout* $\delta > 0$, $u(t) \in D(A_{\frac{1}{2}})$ *pour tout* $t > 0$, $u(t) \in D(A)$ *p.p. sur* $\mathbb{R}_+$ $u'' \in Au$ *p.p. sur* $\mathbb{R}_+$.

DÉMONSTRATION. Nous commençons par établir dans le cas où $u_0 \in D(A)$, les estimations suivantes qui font intervenir seulement $|u_0|$. On a $\sqrt{t}\, u'(t) \in \mathscr{H}$ et

$$\int_0^\infty t |u'|^2 dt \leqq \tfrac{1}{2} |u_0|^2 \tag{7}$$

d'où il résulte que $|u'(t)| \leqq |u_0| / t$ puisque $|u'|$ est décroisasant. On a $t^{\frac{3}{2}} u'' \in \mathscr{H}$ et

$$\int_0^{+\infty} t^3 |u''|^2 dt \leqq \tfrac{1}{2} |u_0|^2 .* \tag{8}$$

L'estimation (7) se déduit de (4) par passage à la limite. Pour prouver (8), posons $v(t) = u(t+h) - u(t)$ $(h > 0)$; grâce à la monotonie de A on obtient $(v'', v) \geqq 0$.

Par suite la fonction $t \mapsto |v(t)|^2$ est convexe, bornée et décroissante. Soit $\zeta \in ([0, T]; \mathbb{R})$ une fonction croissante telle que $\zeta(0) = 0$. On a $\int_0^T \zeta(v'', v) dt \geqq 0$, c'est-à-dire

$$\zeta(T)(v'(T), v(T)) - \int_0^T (v', \zeta v' + \zeta' v) dt \geqq 0 .$$

Donc

$$\int_0^T \zeta |v'|^2 dt + \int_0^T \zeta' \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v|^2 dt \leqq \zeta(T)(v'(T), v(T)) \leqq 0$$

et enfin

$$\int_0^T \zeta |v'|^2 dt \leqq \tfrac{1}{2} \int_0^T \zeta'' |v|^2 dt + \tfrac{1}{2} \zeta'(0) |v(0)|^2 .$$

Divisant par h^2 et passant à la limite quand $h \to 0$ on obtient

$$\int_0^T \zeta |u''|^2 dt \leqq \tfrac{1}{2} \int_0^T \zeta'' |u'|^2 dt + \tfrac{1}{2} \zeta'(0) |u'(0)|^2 .$$

Prenant $\zeta(t) = t^3$, on obtient (8) grâce à (7).

REMARQUE 2. L'estimation (8) est assez précise; en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un opérateur maximal monotone A convenable tel que

---

* C. Fefferman nous a fait remarquer que dans le cas où $A = -\Delta$, les estimations (7) et (8) sont liées aux fonctions g- de Littlewood-Paley.

$t^{\frac{3}{2}+\varepsilon}u_{n}\notin L^2(\mathbb{R}_+;H)$ (lorsque $H = \mathbb{R}$ et $Au = |u|^{p-2}u$, alors $u'' \sim t^{-2-2/(p-2)}$ quand $t \to +\infty$; cf. Remarque 6 de [2])

Nous avons résumé dans le tableau qui suit les propriétés de $u(t) = S_{\frac{1}{2}}(t)u_0$ en fonction des hypothèses sur u_0

$u_0 \in \overline{D(A)}$	$u \in C(\mathbb{R}_+;H) \cap C^1(]0,+\infty[;H) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+;H), t^{\frac{1}{2}}u' \in L^2(\mathbb{R}_+;H)$, $t^{\frac{3}{2}}u'' \in L^2(\mathbb{R}_+;H), u(t) \in D(A_{\frac{1}{2}})$ pour tout $t > 0$ et $u(t) \in D(A)$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$
$u_0 \in D(A_{\frac{1}{2}})$	on a de plus $u \in C^1(\mathbb{R}_+;H)$, $u' \in L^\infty(\mathbb{R}_+;H)$, $\sqrt{t}\,u'' \in L^2(\mathbb{R}_+;H)$
$u_0 \in D(A)$	on a de plus $u'' \in L^2(\mathbb{R}_+;H)$

3. Cas où $A = \partial\phi$

THÉORÈME 4. *Soit ϕ une fonction convexe s.c.i. de H dans $[0,+\infty]$ telle que $\phi(0) = 0$ et soit $A = \partial\phi$. Alors on a $D(A_{\frac{1}{2}}) = D(\phi)$ et $\frac{1}{2}|A^0_{\frac{1}{2}}u_0|^2 = \phi(u_0)$ pour tout $u_0 \in D(\phi)$.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord que $u_0 \in \overline{D(A)}$ et soit $u(t) = S_{\frac{1}{2}}(t)u_0$. On a $u'' \in \partial\phi(u)$ p.p. sur $\mathbb{R}$. Il résulte de lemme 6 de [2] (cf. aussi [3], lemme 3.3) que $u(t) \in D(\phi)$ pour tout $t > 0$ et que la fonction $t \to \phi(u(t))$ est absolument continue sur tout compact de $]0,+\infty[$ avec

$$\frac{d}{dt}\phi(u) = (u'',u') = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{du}{dt}\right|^2 \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}_+$$

(lorsque $u_0 \in D(A)$, la fonction $t \to \phi(u(t))$ est absolument continue sur tout compact de $]0,+\infty[$).

Par suite $\phi(u(t)) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 + C$ pour tout $t > 0$; or $\phi(u) \leqq (u'',u)$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$ et donc $\phi(u) \in L^2(\delta,+\infty)$ pour tout $\delta > 0$. Il en résulte que $\phi(u(t)) \to 0$ quand $t \to +\infty$, et $\phi(u(t)) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2$ pour tout $t > 0$ (lorsque $u_0 \in D(A)$, on a $\phi(u(t)) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2$ pour tout $t \geqq 0$). Supposons que $u_0 \in D(A_{\frac{1}{2}})$; alors $\phi(u(t)) = \frac{1}{2}|u'(t)|^2 \leqq \frac{1}{2}|A^0_{\frac{1}{2}}u_0|^2$ et par conséquent $u_0 \in D(\phi)$ avec $\phi(u_0) \leqq \frac{1}{2}|A^0_{\frac{1}{2}}u_0|^2$. Inversement si $u_0 \in D(\phi)$, soit $u_{0n} \in D(A)$ une suite telle que $u_{0n} \to u_0$ et $\phi(u_{0n}) \leqq \phi(u_0)$ (prendre par exemple $u_{0n} = (I + 1/n\partial\phi)^{-1}u_0$). On a alors $\frac{1}{2}|A^0_{\frac{1}{2}}u_{0n}|^2 = \frac{1}{2}|u_n'(0)|^2 = \phi(u_{0n}) \leqq \phi(u_0)$. On en déduit que $u_0 \in D(A_{\frac{1}{2}})$ et $\frac{1}{2}|A^0_{\frac{1}{2}}u_0|^2 \leqq \phi(u_0)$.

4. Quelques autres propriétés de $A_{\frac{1}{2}}$.

THÉORÈME 5. *Soit A un operateur maximal monotone dans H tel que $A - \alpha I$ soit monotone ($\alpha > 0$). Alors $A_{\frac{1}{2}} - \sqrt{\alpha}I$ est monotone.*

DÉMONSTRATION. Il est équivalent de prover que $|S_{\frac{1}{2}}(t)u_0 - S_{\frac{1}{2}}(t)\hat{u}_0| \leqq e^{-\sqrt{\alpha}t}|u_0 - \hat{u}_0|$ pour tout $t > 0$, et tout $u_0, \hat{u}_0 \in D(A)$. Utilisant le fait que $A - \alpha I$ est monotone, on obtient

$$(u'' - \hat{u}'', u - \hat{u}) \geqq \alpha |u - \hat{u}|^2$$

où $u(t) = S_{\frac{1}{2}}(t)u_0$ et $\hat{u}(t) = S_{\frac{1}{2}}(t)\hat{u}_0$.

On conclut à l'aide du lemme suivant.

LEMME 6. *Soit* $v \in C(\mathbb{R}_+; H) \times L^\infty(\mathbb{R}_+; H)$ *tel que* $v', v'' \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H)$ *et* $\lim_{t \to +\infty} v'(t) = 0$. *On suppose que* $(v'', v) \geqq \alpha |v|^2$ *p.p. sur* $\mathbb{R}_+$. *Alors* $|v(t)| \leqq e^{-\sqrt{\alpha}t}|v(0)|$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 6. La fonction $t \to |v(t)|^2$ est convexe, bornée et décroissante. Posons $\Psi(t) = |v(t)|$; distinguons deux cas.

1er Cas. $\Psi(t) > 0$ pour tout $t > 0$; on a alors $\Psi', \Psi'' \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$. En dérivant l'égalité $\Psi^2(t) = |v(t)|^2$, on obtient $\Psi \cdot \Psi' = (v, v')$, et par suite $|\Psi'| \leqq |v'|$, $\Psi \cdot \Psi'' + |\Psi'|^2 = (v, v'') + |v'|^2 \geqq \alpha |\Psi|^2 \geqq \alpha |\Psi|^2 + |\Psi'^2|$. D'où l'on déduit que $\Psi'' \geqq \alpha \Psi$ p.p. sur $\mathbb{R}_+$. Posons $\omega(t) = e^{-\sqrt{\alpha}t}|v(0)|$ de sorte que $\omega'' = \alpha\omega$ et $\omega(0) = \Psi(0)$; donc

$$(\Psi - \omega)'' \geqq \alpha(\Psi - \omega). \tag{9}$$

Pour prouver que $\Psi \leqq \omega$, multiplions (9) par $(\Psi - \omega)^+$ et intégrons sur $]0, T[$; il vient

$$\alpha \int_0^T |(\Psi - \omega)^+|^2 dt \leqq (\Psi'(T) - \omega'(T)) \cdot (\Psi(T) - \omega(T)).$$

Quand $T \to +\infty$, $\Psi(T) - \omega(T)$ demeure borné, alors que $\Psi'(T)$ et $\omega'(T)$ tendent vers 0.

2ème Cas. Il existe $0 < T < +\infty$ tel que $\Psi(T) = 0$ et $\Psi(t) > 0$ pour $t < T$. Dans ce cas, on a $\Psi', \Psi'' \in L^2(0, T - \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, et comme au premier cas $\Psi'' \geqq \alpha\Psi$ p.p. sur $]0, T[$. Soit $\omega(t)$ la solution de l'équation $\omega'' = \alpha\omega$ sur $]0, T[$, $\omega(0) = \Psi(0)$, $\omega(T) = 0$; on vérifie aisément que $\omega(t) \leqq e^{-\sqrt{\alpha}t}\Psi(0)$ sur $]0, T[$.

On a

$$(\Psi - \omega)'' \geqq \alpha(\Psi - \omega) \text{ p.p. sur }]0, T[. \tag{10}$$

Multipliant (10) par $(\Psi - \omega)^+$ et intégrant sur $]0, T - \varepsilon[$ on obtient

$$\alpha \int_0^{T-\varepsilon} |(\Psi - \omega)^+|^2 dt \leqq (\Psi'(T - \varepsilon) - \omega'(T - \varepsilon)) \cdot (\Psi(T - \varepsilon) - \omega(T - \varepsilon)).$$

Quand $\varepsilon \to 0$, $\Psi'(t-\varepsilon) - \omega'(T-\varepsilon)$ demeure borné, alors que $\Psi(T-\varepsilon)$ et $\omega(T-\varepsilon)$ tendent vers 0. D'où $\Psi \leqq \omega$ sur $[0, T]$.

Notons enfin la propriété suivante de $A_{\frac{1}{2}}$.

THÉORÈME 7. *Soit A un opérateur maximal monotone tel que $0 \in R(A)$. Soit ϕ une fonction convexe s.c.i. propre de H dans $]-\infty, +\infty]$ telle que A soit $\partial\phi$-monotone. Alors $A_{\frac{1}{2}}$ est aussi $\partial\phi$-monotone.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mu > 0$ et soit ϕ_μ la fonction régularisée de ϕ; (cf. [2], appendice). On sait (cf. [3], proposition 4.7) que

$$(f-g), \partial\phi_\mu(x-y)) \geqq 0 \qquad \forall[x,f] \in A, \ \forall[y,g] \in A.$$

Soient u_0 et $\hat{u}_0 \in \overline{D(A)}$, $u(t) = S_{\frac{1}{2}}(t)u_0$, $\hat{u}(t) = S_{\frac{1}{2}}(t)\hat{u}_0$. On a en particulier

$$(u'' - \hat{u}'', \ \partial\phi_\mu(u-\hat{u})) \geqq 0 \quad \text{p.p. sur } \mathbb{R}_+$$

Or

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi_\mu(u - \hat{u}) = (u'' - \hat{u}'', \ \partial\phi_\mu(u - \hat{u})) + (u' - \hat{u}' \ \frac{d}{dt} \ \partial\phi_\mu(u - \hat{u})) \geqq 0.$$

Il en résulte que la fonction $t \to \phi_\mu(u - \hat{u})$ est convexe et bornée (car ϕ_μ est borné sur les ensembles bornés). Donc cette fonction est décroissante; d'où $\phi_\mu(S_{\frac{1}{2}}(t)u_0 - S_{\frac{1}{2}}(t)\hat{u}_0) \leqq \phi_\mu(u_0 - \hat{u}_0)$ et par conséquent $A_{\frac{1}{2}}$ est $\partial\phi$-monotone (cf. [3], proposition 4.7).

BIBLIOGRAPHIE

1. V. Barbu, *A class of boundary problems for second order abstract differential equations*, C.R. Acad. Sci. (Janvier, 1972) et article détaillé á paraitre.

2. H. Brezis, *Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires*, Israel J. Math., **9** (1971), 513–534.

3. H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Cours de 3ème cycle multigraphié, Paris, 1971.

4. H. Brezis, M. Crandall and A. Pazy, *Perturbations of nonlinear maximal monotone sets*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 123–144.

5. T. Kato, *On an inequality of Hardy, Littlewood and Polya*, Advances in Math. **7** (1971), 217–218.

MATHÉMATIQUES UNIVERSITÉ DE PARIS VI
9, Quai Saint Bernard, Paris 5^e